OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Se consideră numerele:

$$A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}} \text{ și } B=2+4+6+\cdots+88.$$

a) Arătați că $\sqrt{A\cdot B}$ și $\sqrt{\frac{A}{B}}$ sunt numere raționale;

b) Arătați că, dacă pentru numerele raționale strict pozitive x și y, $\sqrt{x\cdot y}$ este număr rațional, atunci și $\sqrt{\frac{x}{y}}$ este număr rațional.

Soluție:

a) $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 1}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}}+$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4\cdot 3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2025\cdot 2024}}-\frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}}$ 1p

$A=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$ 1p

$B=2+4+6+\cdots+88=2(1+2+\cdots+44)=44\cdot 45$ 1p

$\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{44\cdot 45\cdot\frac{44}{45}}=44\in Q,\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{44}{45}\cdot\frac{1}{44\cdot 45}}=\frac{1}{45}\in Q$ 1p

b) $y\in Q, y\neq 0\Rightarrow\frac{1}{y}\in Q$ 1p

$\sqrt{x\cdot y}\in Q\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot\sqrt{x\cdot y}\in Q$ 1p

$\Rightarrow\sqrt{\frac{xy}{y^2}}\in Q\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{y}}\in Q$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

SUBIECTUL II

Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ pentru care $\sqrt{\overline{abc}} = 2(a+b+c)$.

(Gazeta Matematică nr. 10 – 2023)

Soluție:

$100 \le \overline{abc} \le 999 \Rightarrow 10 \le \sqrt{\overline{abc}} \le 31$ 1p

$\Rightarrow 5 \le a+b+c \le 15$ 1p

$\sqrt{\overline{abc}} = 2(a+b+c) \Rightarrow \overline{abc} = 4(a+b+c)^2 \Rightarrow 100a+10b+c = 4(a+b+c)^2 \Rightarrow$

$99a+9b = 9(11a+b) = (a+b+c)[4(a+b+c)-1]$..1p

$(a+b+c; 4(a+b+c)-1) = 1 \Rightarrow (a+b+c) \vdots 9$ sau

$4(a+b+c)-1 \vdots 9$ 1p

$(a+b+c) \vdots 9,\ 5 \le a+b+c \le 15 \Rightarrow a+b+c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 324$ 2p

$4(a+b+c)-1 \vdots 9,\ 5 \le a+b+c \le 15 \Rightarrow 19 \le 4(a+b+c)-1 \le 59$,

$\Rightarrow 4(a+b+c)-1 = 27$ (singurul multiplu de 9 de forma $4k-1$ situat între 19 și 59) $\Rightarrow a+b+c = 7,\ \overline{abc} = 196$, soluție care nu convine......................................1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

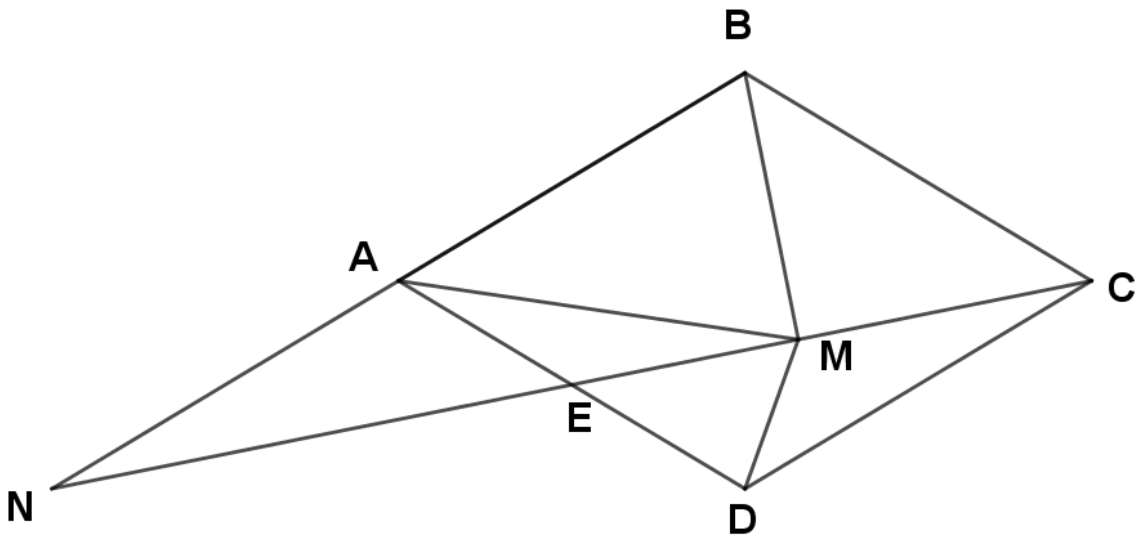
SUBIECTUL III

În rombul ABCD, E este mijlocul laturii AD, iar $M \in CE$, astfel încât $BM \perp CE$.

a) Aflați raportul dintre aria patrulaterului ABCE și aria rombului ABCD;

b) Arătați că triunghiul AMD este isoscel.

Soluție:



a) CE mediană în $\Delta ACD \Rightarrow A_{\Delta CDE} = \frac{1}{2}A_{\Delta ACD} = \frac{1}{4}A_{ABCD}$ 1p

$A_{ABCE} = A_{ABCD} - A_{\Delta CDE}$ 1p

$\frac{A_{ABCE}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{ABCD}-A_{\Delta CDE}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{4}$ 1p

b) Fie $\{N\} = CE \cap AB$.

În ΔNBC: $AE \parallel BC$, $AE = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ AE linie mijlocie $\Rightarrow AN = AB$ 2p

În ΔMBN, $\sphericalangle BMN = 90^\circ$, MA mediană $\Rightarrow MA = BA = AN$ 1p

$AB = AD \Rightarrow AM = AD \Rightarrow \Delta AMD$ isoscel...1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

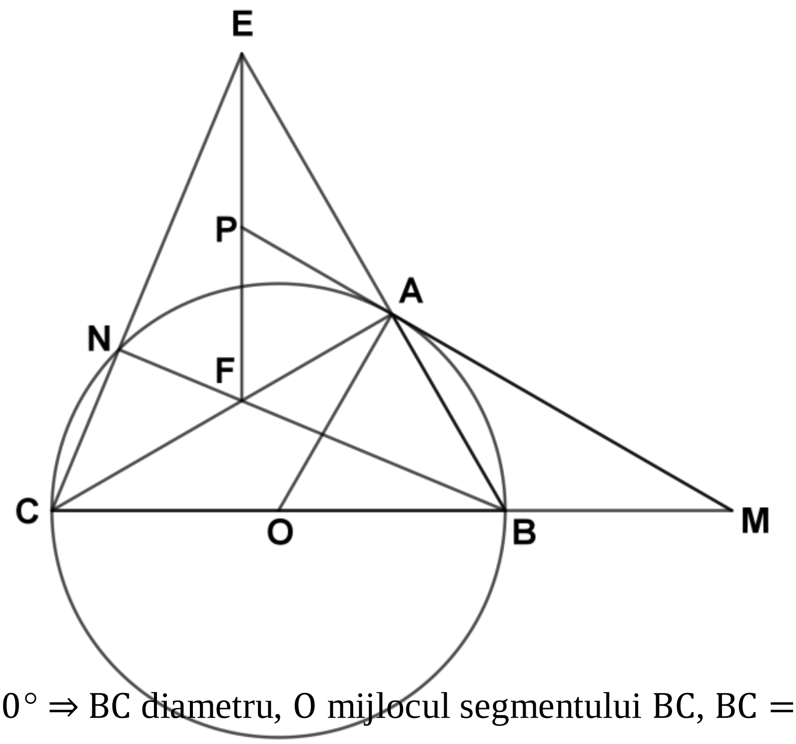
SUBIECTUL IV

Triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$, este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Tangenta în punctul A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ intersectează dreapta BC în punctul M.

a) Arătați că $BC = 2BM$;

b) Dacă N este un punct situat pe arcul mic AC, $AB \cap CN = \{E\}$, $AC \cap BN = \{F\}$, iar $EF \cap AM = \{P\}$, stabiliți natura triunghiului AFP.

Soluție:



a) $\sphericalangle BAC = 90° \Rightarrow$ BC diametru, O mijlocul segmentului BC, $BC = 2r$................. 1p

$\sphericalangle C = 30° \Rightarrow$ arcul AB $= 60° \Rightarrow \sphericalangle AOB = 60° \Rightarrow \Delta$ AOB echilateral $\Rightarrow AB = r$ 1p

AM tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r) \Rightarrow OA \perp AM \Rightarrow \sphericalangle OAM = 90° \Rightarrow \sphericalangle AMO = 30°$ 1p

$\sphericalangle BAM = 30° \Rightarrow \Delta$ ABM isoscel $\Rightarrow BM = AB = r \Rightarrow BC = 2BM$........................ 1p

b) $\sphericalangle BNC = 90°$ (unghi înscris în semicerc) $\Rightarrow BN \perp EC$

În ΔEBC, CA și BN înălțimi, $CA \cap BN = \{F\} \Rightarrow$ F ortocentru $\Rightarrow EF \perp BC$........... 1p

Fie $EF \cap BC = \{T\}$.

$EF \perp BC \Rightarrow \sphericalangle MTP = 90°$, iar, din Δ MTP, obținem $\sphericalangle MPT = 60°$...................... 1p

$\sphericalangle PAF = 180° - \sphericalangle CAM = 60° \Rightarrow \Delta$ AFP echilateral.. 1p